Über das Verhältniss der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte.

Von **Eduard Aulinger,**
Assistenten der Physik am k. k. Polytechnikum in Graz.

(Mit 2 Holzschnitten.)

In seiner Abhandlung: „Über die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik" [1] hat Herr Hertz einen Grundsatz aufgestellt, welcher sich als äusserst fruchtbar erwies, indem er ihm gestattete, eine Gruppe von bisher gänzlich unbekannten Erscheinungen, wenn auch nicht mit voller Sicherheit vorauszusagen, so doch als wahrscheinlich zu erkennen. Er bezeichnet diesen Grundsatz als das Princip der Einheit der elektrischen Kräfte, dem er natürlich ein Princip der Einheit der magnetischen Kräfte an die Seite stellt. Er spricht diesen Grundsatz zunächst in folgenden Worten aus: „Die von Strömen ausgeübten magnetischen Kräfte sind in allen ihren Wirkungen gleichwerthig mit gleich grossen und gleichgerichteten Kräften, die von Magnetpolen ausfliessen." In Bezug auf die Inductionserscheinungen kömmt hiezu noch der Satz: „Diejenigen elektrischen Kräfte, welche aus Inductionswirkungen entspringen, sind nach jeder Richtung gleichbedeutend mit gleichen und gleichgerichteten Kräften elektrostatischer Quelle."

Ich habe mir in der gegenwärtigen Abhandlung die Aufgabe gestellt, die Beziehungen des Hertz'schen Princips zur Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu untersuchen. Bevor ich jedoch an diese Aufgabe gehe, muss ich einer Unklarheit in der

[1] Wiedemann's Annalen. 1884. Neue Folge. Bd. XXIII.

Hertz'schen Fassung seines Princips erwähnen, auf welche mich Herr Prof. Boltzmann im Gespräche aufmerksam machte. Der erste oben citirte auf die elektromagnetischen Wirkungen Bezug habende Theil des Princips dürfte wohl kaum ganz strenge sein; denn wird die Identität von allen Kräften behauptet, so ist er nicht richtig, da bei den Kräften, welche von elektrischen Strömen ausgehen, zu den magnetischen Wirkungen auch noch die der elektrostatischen Ladung der Leitungsdrähte hinzukommen, welche bei den von Magneten selbst ausgehenden Kräften fehlen. Es kann also die Identität blos von den magnetischen Kräften behauptet werden. Diese können aber nicht als solche definirt werden, welche auf Magnetpole allein wirken, sondern vielmehr als solche, welche entweder auf Magnetpole oder auf geschlossene elektrische Ströme von constanter Geschwindigkeit wirken. Etwas Ähnliches gilt natürlich von dem auf die Inductionswirkungen Bezug habenden Theil des Hertz'schen Princips.

Ich will es hier ganz unentschieden lassen, ob die Hertz'sche Fassung seines Principes durch passende Ergänzungen vollkommen einwurfsfrei gemacht werden könnte, glaube aber, dass es die grosse Wichtigkeit dieses Principes entschuldigen wird, wenn ich hier eine veränderte Form desselben anführe, welche mir ebenfalls von Herrn Professor Boltzmann gesprächsweise mitgetheilt wurde, und welche, wie es scheint, sehr klar und frei von jedem circulus vitiosus ist. Ob hiemit der Grundgedanke, von welchem Herr Hertz ausging, getroffen ist, oder nicht, muss natürlich ebenfalls unentschieden bleiben, und mein Zweck ist jedenfalls erreicht, wenn die nachfolgenden Ausführungen zur Klarstellung dieser von Herrn Hertz in die Elektrodynamik ganz neu eingeführten Betrachtungsweise ein Weniges beitragen.

Die in Rede stehende Fassung des Hertz'schen Principes lautet folgendermassen: „Wenn in einem endlichen oder unendlichen Raume (elektromagnetischem Felde) an jedem Punkte Grösse und Richtung der elektrostatischen Kraft (das heisst der Kraft, welche auf eine im betreffenden Punkte ruhend gedachte Elektricitätsmenge Eins[1] wirkt) und Grösse und Richtung der

[1] Dieselbe sowie der später erwähnte Nordpol Eins dürfen natürlich die Vertheilung der Elektrisirung und Magnetisirung im Felde nicht stören.

magnetischen Kraft (das heisst der Kraft, welche auf einen daselbst als ruhend und unveränderlich gedachten Nordpol Eins wirkt) gegeben sind, so sind damit sämmtliche magnetischen und elektrischen Kräfte, welche im ganzen Felde auf bewegte und veränderliche Elektricitäten und Magnetismen wirken, vollständig und eindeutig bestimmt, gleichgiltig, welchen Ursprungs die magnetischen und elektrischen Kräfte sind."

Adoptiren wir von vornherein die Amper'sche Anschauung über das Wesen des Magnetismus, so dass der Magnetismus blos als die Wirkung molekularer elektrischer Ströme aufgefasst wird, so sind die magnetischen Kräfte bestimmt, sobald die Kräfte gegeben sind, welche auf geschlossene elektrische Ströme von constanter Intensität wirken. Wir können also unser Princip auch in folgender Weise aussprechen: „Die in einem elektrischen Felde wirksamen elektrischen Kräfte sind vollständig und eindeutig bestimmt, sobald wir in jedem Punkte des Feldes die Kräfte kennen, welche auf eine daselbst ruhende und auf eine mit constanter Geschwindigkeit bewegte Elektricitätsmenge wirken". Es mögen diese elektrischen Kräfte was immer für einen Ursprung haben, sobald sie in diesen beiden Fällen dieselbe Wirkung ausüben, üben sie in allen anderen Fällen, namentlich auch auf Elektricitätsmengen, welche sich mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegen, dieselbe Wirkung aus. [1]

Wir sehen sofort, wie aus diesem Principe alle Schlüsse des Herrn Hertz mit voller Klarheit folgen. Wir haben einen Raum A, in welchem sich eine magnetische Doppelschicht befindet, wobei der unendlich kleine Raum zwischen den beiden Belegungen als vom Raume A ausgeschlossen betrachtet wird. Aus den blossen Gesetzen der Wechselwirkung zwischen Magnetpolen und elektrischen Strömen folgt, dass ein in diesem Raume befindlicher elektrischer Strom auf die Doppelschicht gewisse Kräfte ausüben würde, und daher aus dem Principe der Gleichheit der

[1] Noch einfacher verhält sich in dieser Beziehung das Gravitationsgesetz. Da ist die Natur eines Raumes bereits vollständig bestimmt, wenn man in jedem Punkte die auf eine ruhende Masse Eins wirkende Kraft nach Grösse und Richtung kennt. Dadurch ist bereits die Kraft bestimmt, welche auf eine mit constanter Geschwindigkeit bewegte Masse wirkt, was für elektrische Kräfte nicht gilt.

Wirkung und Gegenwirkung, dass auch umgekehrt die Doppelschicht auf jeden im Raume A befindlichen elektrischen Strom ebenfalls gewisse Kräfte ausübt. Nun denken wir uns einen zweiten Raum B, in welchem ein elektrischer Strom von passender Intensität fliesst, dessen Bahn congruent der Begrenzung der Doppelschicht ist. Um die Verhältnisse in beiden Räumen absolut gleich zu machen, denken wir uns entweder die Peripherie der Doppelschicht isolirend und genau mit derselben statischen Elektricität geladen, die den Strom im Raume B treibt, oder wir denken uns den Strom in bekannter Weise durch ein unendlich feines Stromnetz ersetzt, welches schon durch eine verschwindende elektrostatische Ladung getrieben werden kann. Die beiden Räume A und B sind dann so beschaffen, dass die elektrostatischen und magnetischen Kräfte in ihnen vollkommen gleich sind; da wir nun sahen, dass im Raume A auf alle elektrischen Ströme Kräfte wirken müssen, so folgt aus unserem Principe, dass dies auch im Raume B der Fall sein muss; das heisst, dass der im Raume B befindliche elektrische Strom auf alle anderen daselbst befindlichen Ströme Kräfte ausüben muss; mit anderen Worten: Aus dem Gesetze der Wechselwirkung von Strömen und Magneten folgt mittelst unseres Principes die Wechselwirkung von Strömen untereinander. Natürlich habe ich hier längst Bekanntes gesagt, und lege nur Werth auf die vollkommen scharfe Fassung der Prämissen.

Mit nicht geringerer Schärfe lässt sich aus unserem Principe die Schlussfolgerung Hertz' über die Wechselwirkung erlöschender Ringmagnete ableiten. In einem Raume A befinde sich eine elektrische Doppelschicht. Aus den blossen Gesetzen der Induction folgt, dass, wenn etwa in diesem Raume noch ausserdem ein erlöschender Ringmagnet vorhanden wäre, er auf die Doppelschicht gewisse Kräfte ausüben würde, und aus dem Principe der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung folgt ferner, dass auch die elektrische Doppelschicht auf den Ringmagnet gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ausüben müsse. In einem zweiten Raume B befinde sich ein erlöschender, unendlich dünner Ringmagnet von passender Erlöschungsgeschwindigkeit, dessen Mittellinie congruent mit der Begrenzung der im Raume A befindlichen elektrischen Doppelschicht ist. Aus den allgemein an-

erkannten Gesetzen der Elektrodynamik und der Induction folgt, dass in beiden Räumen die elektrostatischen Kräfte genau gleich, die magnetischen aber gleich Null sind. Daher folgt aus unserem Principe, dass überhaupt alle elektrischen und magnetischen Kräfte in beiden Räumen gleich sein müssen. Nun sahen wir aber, dass im Raume *A* auf erlöschende Ringmagnete Kräfte wirken; aus unserem Principe folgt daher mit Nothwendigkeit, dass dies auch im Raume *B* der Fall sein muss; das heisst, dass erlöschende Ringmagnete auf andere erlöschende Ringmagnete Kräfte ausüben müssen.

Man sieht, dass sich aus dem hier aufgestellten Principe die Schlussfolgerungen Hertz' mit voller Nothwendigkeit ergeben müssen. Freilich klingt das Princip in dieser Fassung keineswegs so selbstverständlich, wie in der Hertz'schen Fassung. Da die elektrischen Kräfte nicht wie das Newton'sche Gravitationsgesetz blos von der relativen Lage der Theilchen, sondern auch von deren Geschwindigkeit, also den Differentialquotienten ihrer Coordinaten nach der Zeit abhängen, so erscheint es als nicht ganz selbstverständlich, dass die Kräfte durch die Coordinaten sämmtlicher Theilchen und deren erste Differentialquotienten vollständig bestimmt sein müssen, dass nicht auch zum Beispiele noch die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit von Einfluss auf die Kräfte sind. Weit mehr von vornherein evident klingt das Hertz'sche Princip von der Einheit der elektrischen Kräfte, allein es erscheint zweifelhaft, ob demselben eine allgemeinere Fassung gegeben werden könne, in welcher es evidenter ist, als unser aufgestelltes Princip, und doch mit derselben Strenge zu den Hertz'schen Folgerungen führt.

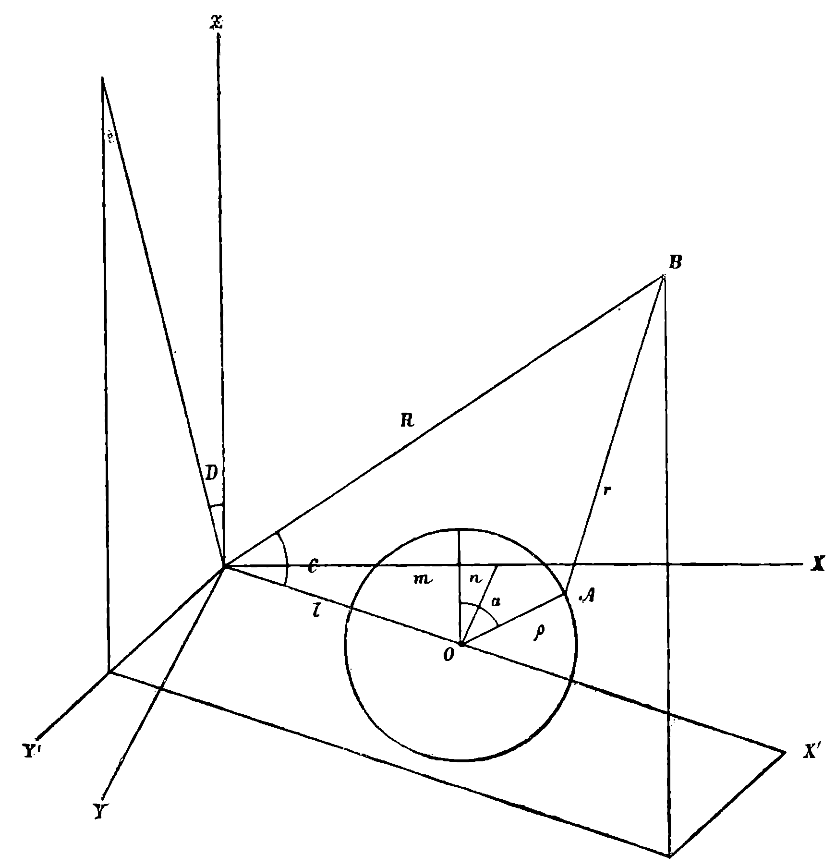
In der bisherigen Fassung scheint mir Herr Hertz unsere Annahme doch auch implicit zu machen; denn er behauptet auf Seite 87: „Rühren insbesondere die elektrischen Kräfte, welche auf den Ringmagnet wirken, gar nicht von elektrischen Massen, sondern von einem zweiten erlöschenden Ringmagnet her, so ist ihre Vertheilung dieselbe, als rührten sie von einer elektrischen Doppelschicht her; nach unserer Annahme von der Einheit der elektrischen Kraft findet daher auch zwischen den beiden erlöschenden Ringmagneten Wechselwirkung statt, etc.“ Nun lehrt

aber die Erfahrung blos, dass erlöschende Ringmagnete und elektrische Doppelschichten auf ruhende und mit constanter Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen dieselben Kräfte ausüben; dass sie auch auf rasch veränderliche Ströme, also insbesondere auf andere erlöschende Ringmagnete nach allen Richtungen dieselben Kräfte ausüben müssen, kann, wie mir scheint, nur erschlossen werden, wenn man annimmt, dass die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten der elektrischen Theilchen auf die zwischen ihnen wirkenden Kräfte ohne Einfluss sind. Der blossen Einheit der elektrischen Kräfte würde es meines Erachtens nicht widersprechen, wenn eine elektrische Doppelschicht zwar auf ruhende und mit constanter Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen ebenso wie ein mit constanter Geschwindigkeit erlöschender Ringmagnet, auf mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen, also speciell auf andere erlöschende Ringmagnete anders wirken würde, wie es in der That Weber's Theorie ergibt.

Ein Gleiches gilt natürlich von dem, was Herr Hertz auf S. 94 nach Formel 3) sagt; denn, um das Potential zweier erlöschender Ringmagnete auf einander aus den Hertz'schen Kräften 3) abzuleiten, muss man wieder aus der Thatsache, dass elektrische Doppelschichten auf ruhende und mit constanter Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen dieselben Kräfte ausüben, wie mit constanter Geschwindigkeit erlöschende Ringmagnete, den Schluss ziehen, dass sie auf veränderliche Ströme dieselben Kräfte ausüben. Dass insbesondere aus der Einheit der elektrischen Kräfte allein die Hertz'schen Folgerungen noch nicht abgeleitet werden könnten, scheint besonders dadurch erwiesen zu sein, dass das Weber'sche Gesetz nicht zu denselben führt, während es doch kein Gesetz geben kann, welches die volle Einheit der elektrischen und magnetischen Kräfte so sehr wahrt, wie das Weber'sche Gesetz, was Herr Hertz selbst bemerkt. Das Weber'sche Gesetz steht also auch mit jedem Principe in Widerspruch, aus welchem sich folgerichtig die Schlüsse Hertz' ergeben, und in der That steht es mit dem hier ausgesprochenen Principe in Widerspruch, da ja nach Weber die elektrischen Kräfte auch von den zweiten Differentialquotienten der Coordinaten der elektrischen Massen nach der Zeit abhängen.

Dagegen muss das Maxwell'sche Gesetz zu allen Folgerungen Hertz' führen, da es den Gesammtzustand des Feldes und daher auch alle darin auftretenden Kräfte als nur abhängig von den Positionen und Geschwindigkeiten der daselbst befindlichen elektrischen Massen annimmt. Herr Hertz sagt: „Die Behauptung, dass diese Kräfte specielle Fälle einer allgemeineren Kraftäusserung sind, würde Sinn und Bedeutung verlieren, wollte man zulassen, dass sich dieselben anders als durch Grösse und Richtung, dass sie sich auch noch durch Wesen und Wirkungsweise von einander unterscheiden könnten.“ Es scheint hienach fast, als ob er glauben würde, dass auch das Weber'sche Gesetz, das sicher keinen Unterschied der elektrischen Kräfte nach

Fig. 1.



Wesen und Wirkungsweise kennt, mit seinem Principe der Einheit der elektrischen Wirkung im Einklange stünde. Es müsste dann auch die Weber'sche Theorie die von Hertz erschlossenen Kräfte zwischen erlöschenden Ringmagneten liefern, und daher erschien es mir wichtig, zu prüfen, erstens in welchem Verhältnisse die Weber'sche Theorie zu dem hier aufgestellten Principe steht, und zweitens, was aus ihr über die Wechselwirkung zweier erlöschender Ringmagnete folgt.

Was den ersten Punkt betrifft, so genügt es vollkommen, in einem möglichst einfachen speciellen Beispiele nachzuweisen, dass die Weber'sche Theorie in der That diesem Principe widerspricht.

Es sei (Fig. 1) B ein Punkt der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R; x, y, z dessen Coordinaten, deren Ursprung im Kugelmittelpunkte liegt; $d\sigma$ sei ein Oberflächelement der Kugel und e' die Menge der positiven Elektricität auf der Flächeneinheit; im Innern der Kugel befinde sich ein Kreis vom Radius ρ; man kann dann das Coordinatensystem immer so wählen, dass der Kreismittelpunkt in die XY-Ebene und die Kreisebene parallel zur XZ-Ebene zu liegen kömmt; es seien ferner ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes A der Peripherie des Kreises, ds ein Längenelement derselben und e die Menge der positiven Elektricität auf der Längeneinheit. Es sind dann die nach dem Weber'schen Gesetze zwischen den Elementen im Abstande r wirkenden Kraftcomponenten:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= e e'.ds.d\sigma \frac{x-\xi}{r^3}\left[1+\frac{a^2}{16}\left\{2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right] \\ p_y &= e e'.ds.d\sigma \frac{y-\eta}{r^3}\left[1+\frac{a^2}{16}\left\{2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right] \\ p_z &= e e'.ds.d\sigma \frac{z-\zeta}{r^3}\left[1+\frac{a^2}{16}\left\{2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Nennen wir den Winkel, den der Radius $\rho = OA$ mit einer etwa der Z-Richtung parallelen Anfangslage einschliesst, α, die Coordinaten des Kreismittelpunktes m und n, so ist:

$$\xi = m + \rho \sin\alpha; \quad \eta = n; \quad \zeta = \rho\cos\alpha.$$

Behufs der auszuführenden Integration über die Kugel wollen wir die Coordinaten des Punktes B durch andere ausdrücken, wobei die neue Axe X' die Mittelpunkte der Kugel und des

Kreises verbindet. Es sei dann Winkel C die Poldistanz und Winkel D die Länge von der Z-Axe an gezählt, X' die Polaraxe der Kugel; dann erhalten wir:

$$x' = R\cos C; \quad y' = R\sin C\sin D; \quad z = R\sin C\cos D,$$

oder:

$$x = R\frac{m}{l}\cos C - R\frac{n}{l}\sin C\sin D$$

$$y = R\frac{n}{l}\cos C + R\frac{m}{l}\sin C\sin D$$

$$z = R\sin C\cos D,$$

wobei $l = \sqrt{m^2+n^2}$ ist.

Führen wir diese Werthe in:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

ein, so bekommen wir, da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ und:}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = m^2 + n^2 + \rho^2 + 2m\rho\sin\alpha$$

ist, für r^2 folgenden Werth:

$$r^2 = R^2 - 2R\left\{l\cos C + \frac{m\rho}{l}\sin\alpha\cos C - \frac{n\rho}{l}\sin\alpha\sin C\sin D + \right.$$
$$\left. + \rho\cos\alpha\sin C\cos D\right\} + (l^2 + \rho^2 + 2m\rho\sin\alpha), \qquad 2)$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \frac{2}{R}\left\{l\cos C + \frac{m\rho}{l}\sin\alpha\cos C - \frac{n\rho}{l}\sin\alpha\sin C\sin D + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \rho\cos\alpha\sin C\cos D\right\} + \frac{l^2 + \rho^2 + 2m\rho\sin\alpha}{R^2}\right]^{-3/2}$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir nach dem binomischen Satze in eine Reihe, wobei wir in der Summe Glieder höherer Ordnung als der zweiten der Grössen m, n, l und ρ gegenüber solchen von R vernachlässigen; wir erhalten somit:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\Big[1 + \frac{3}{R}\Big\{l\cos C + \frac{m\rho}{l}\sin\alpha\cos C - \frac{n\rho}{l}\sin\alpha\sin C\sin D + \\
+ \rho\cos\alpha\sin C\cos D\Big\} - \frac{3}{2R^2}(l^2 + \rho^2 + 2m\rho\sin\alpha) + \\
+ \frac{15}{2R^2}\Big\{l^2\cos^2 C + \frac{m^2\rho^2}{l^2}\sin^2\alpha\cos^2 C + \frac{n^2\rho^2}{l^2}\sin^2\alpha\sin^2 C\sin^2 D + \\
+ \rho^2\cos^2\alpha\sin^2 C\cos^2 D +
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

$$+ 2m\rho \sin\alpha \cos^2 C - 2n\rho \sin\alpha \cos C \sin C \sin D +$$

$$+ 2l\rho \cos\alpha \cos C \sin C \cos D -$$

$$- \frac{2mn\rho^2}{l^2} \sin^2\alpha \cos C \sin C \sin D + \frac{2m\rho^2}{l} \cos\alpha \sin\alpha \cos C \sin C \cos D -$$

$$- \frac{2n\rho^2}{l} \cos\alpha \sin\alpha \sin^2 C \cos D \sin D \Big\} \Big]$$

Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, es sei die Kugel statisch etwa positiv geladen, es sei also α die einzige Veränderliche nach der Zeit, sobald Elektricität im Kreise fliesst. Dann haben wir unter Berücksichtigung von 2):

$$2r \frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\rho \Big\{ - \frac{Rm}{l} \cos\alpha \cos C + \frac{Rn}{l} \cos\alpha \sin C \sin D +$$

$$+ R \sin\alpha \sin C \cos D + m \cos\alpha \Big\} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + M \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \tag{4}$$

wobei auf den Coëfficienten von $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ bei Annahme eines positiven und eines negativen Stromes im Kreise keine weitere Rücksicht zu nehmen ist; überhaupt sind für uns nur Glieder mit $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ von Belang.

Es wären hierauf die Ausdrücke 3) und 4) und die vorhin gefundenen Werthe der Coordinaten in 1) zu substituiren, und nachdem $d\sigma = R^2 \sin C\, dC\, dD$ gesetzt wurde, in Bezug auf D von O bis 2π und in Bezug auf C von O bis π zu integriren. Die diesbezügliche Rechnung ist etwas weitläufig, so dass ich mich begnügen muss, die ermittelten Resultate mitzutheilen. Ich habe als Componenten der Wirkung der ganzen Kugel auf das Längenelement des Kreises $ds = \rho d\alpha$ folgende Werthe gefunden:

$$P_x = - \frac{ee' R \rho^2 a^2 \pi}{6} \cos\alpha\, d\alpha . \frac{d^2\alpha}{dt^2}; \quad P_y = 0$$

$$P_z = \frac{ee' R \rho^2 a^2 \pi}{6} \sin\alpha\, d\alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Man sieht sofort, dass eine Integration über den Kreis in Bezug auf α von 0 bis 2π keinerlei Translationswerthe ergibt; Dagegen erhalten wir ein Drehmoment für die Y-Richtung, und

zwar, wenn wir nun auch negative Elektricität $-e$ mit $-\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ im Kreise fliessen lassen:

$$D_y = -\frac{2}{3} e e' R \rho^3 a^2 \pi^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Wie nun auch immer die Lage des Kreisstromes innerhalb der Kugel sei, jedenfalls wird dieses gefundene Drehmoment dadurch, dass wir erst höhere Potenzen von m, n, l und ρ gegen solche von R vernachlässigen, nur modificirt werden. Für ein Solenoid wäre statt des Längenelementes ein sich auch nach der Y-Richtung erstreckendes Element zu nehmen und die diesbezügliche Integration durchzuführen.

Berücksichtigen wir ferner, dass

$$2e\rho \frac{d\alpha}{dt} = i_{\text{(mech.)}}$$

die Stromstärke im mechanischen Masse gemessen bedeutet, so dass:

$$2e\rho \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{di_{\text{(mech.)}}}{dt}$$

ist, und bezeichnen wir mit E(mech.) die auf der ganzen Kugel vertheilte Elektricitätsmenge ebenfalls im mechanischen Masse, wobei also:

$$e' = \frac{E_{\text{(mech.)}}}{4R^2\pi}$$

ist, so wird:

$$D_y = -\frac{a^2}{12} \frac{\rho^2\pi}{R} E_{\text{(mech.)}} \cdot \frac{di_{\text{(mech.)}}}{dt}.$$

Nun ist die Constante a des Weber'schen Gesetzes gegeben durch:

$$\frac{4}{a} = v\sqrt{2}, \text{ wobei } v = \frac{3 \cdot 10^{10}\,\text{cm.}}{\text{sec.}}$$

das Verhältniss der elektrostatischen und elektromagnetischen Stromeinheit ist, nämlich $v \cdot i_{\text{(magn.)}} = i_{\text{(mech.)}}$, $vE_{\text{magn.}} = E_{\text{mech.}}$; es ist also $\frac{a^2}{6} = \frac{4}{3v^2}$ und:

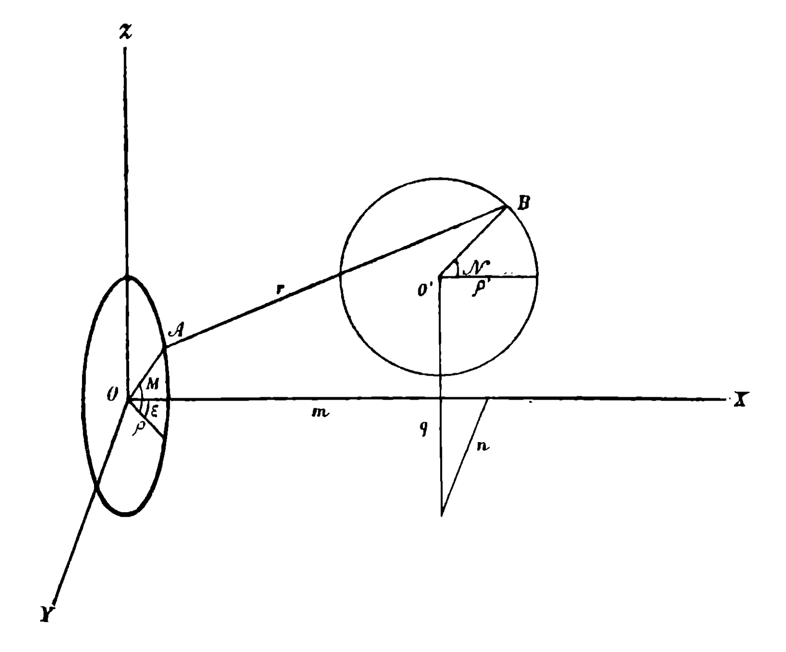
$$D_y = -\frac{2\pi\rho^2}{3v^2R} \cdot E_{\text{mech.}} \frac{di_{\text{mech.}}}{dt} = -\frac{2\pi\rho^2}{3R} E_{\text{magn.}} \frac{di_{\text{magn.}}}{dt}.$$

Bezeichnet man mit $K_{\text{magn.}}$ das Potential oder die elektromotorische Kraft im Innern der Kugel in magnetischem Masse gemessen, so ist $E_{\text{magn.}} = RK_{\text{magn.}}|v^2$, da die Capacität der Kugel im elektrostatischen Masse R, daher im elektromagnetischen $R|v^2$ ist. Es folgt also

$$D_y = -\frac{2\pi\rho^2}{3v^2} K_{\text{magn.}} \frac{di_{\text{magn.}}}{dt}.$$

Nehmen wir nun wieder unsere Räume A und B her, so ist in denselben, wenn etwa A an seiner Oberfläche positiv geladen ist, und B vollständig neutral angenommen wird, die statische Wirkung oder die Wirkung auf ruhende Elektricität in beiden Null, wogegen in A auf einen veränderlichen Strom ein Drehmoment ausgeübt wird; offenbar sind daher die Hertz'sche Theorie und das Weber'sche Gesetz im Widerspruche. Eine experimentelle Prüfung der obigen Formel dürfte ein experimentum crucis für die Weber'sche Theorie liefern.

Fig. 2.



Was nun das Verhalten zweier Ringmagnete anlangt, so wollen wir zunächst zwei Kreisströme betrachten, die beliebig im Raume liegen. Es wird in zwei Kreisen immer ein Durchmesserpaar zu finden sein, das parallel ist. Wählen wir den Mittelpunkt des einen Kreises O zum Coordinatenursprung, die Richtung der besagten parallelen Durchmesser zur Z-Richtung, und drehen dann das System um die Z-Axe so, dass die Ebene des zweiten Kreises O' in eine zur XZ-Ebene parallele Ebene zu liegen kömmt; es wird dann die Ebene des ersten Kreises mit der XZ-Ebene einen Winkel einschliessen. Es seien ρ und ρ_1 die Radien der Kreise, A und B Punkte der Peripherien mit den respectiven Coordinaten ξ, η, ζ und x, y, z; ferner m, n und q die Coordinaten des Kreismittelpunktes O'; endlich M und N die Winkel, welche die Radien OA und $O'B$ mit ihren respectiven Anfangslagen, die der XY-Ebene und einer zu dieser parallelen in O' entsprechen mögen, bilden. Sind dann ds und ds' die im Abstande r befindlichen Längenelemente in A und B, und e und e' die entsprechenden Elektricitätsmengen auf der Längeneinheit, so sind nach Einführung von ds' statt $d\sigma$ die vorhin in 1) aufgestellten Formeln für die Wirkung der Elemente beizubehalten.

Dabei sind:

$$\xi = \rho \cos\varepsilon \cos M; \quad \eta = \rho \sin\varepsilon \cos M; \quad \zeta = \rho \sin M,$$
$$x = m + \rho_1 \cos N; \quad y = n \quad z = q + \rho_1 \sin N,$$

und es ist daher, wenn man $m^2+n^2+q^2 = \overline{OO'}^2 = R^2$ setzt:

$$r^2 = R^2+\rho^2+\rho_1^2 - 2m\rho \cos\varepsilon \cos M - 2n\rho \sin\varepsilon \cos M - 2q\rho \sin M +$$
$$+ 2m\rho_1 \cos N + 2q\rho_1 \sin N - 2\rho\rho_1 \cos\varepsilon \cos M \cos N - 2\rho\rho_1 \sin M \sin N.$$

Daraus folgt:

$$2r\frac{dr}{dt} = 2\rho\{m \cos\varepsilon \sin M + n \sin\varepsilon \sin M - q \cos M - \rho_1 \cos M \sin N$$
$$+ \rho_1 \cos\varepsilon \sin M \cos N\} \frac{dM}{dt} +$$
$$+ 2\rho_1\{q \cos N - m \sin N - \rho \sin M \cos N + \rho \cos\varepsilon \cos M \sin N\} \frac{dN}{dt}.$$

Setzen wir den Factor von $\frac{dM}{dt}$ gleich A, ebenso den von $\frac{dN}{dt}$ gleich B, so erhalten wir für den in 1) stehenden Klammerausdruck:

$$2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=A\frac{d^2M}{dt^2}+\mathrm{B}\frac{d^2N}{dt^2}+Q,$$

wobei Q keine zweiten Differentialquotienten enthält.

Führen wir diesen Ausdruck in die Formeln 1) ein, und nehmen wir jetzt in beiden Kreisen Ströme nach beiden Richtungen mit entgegengesetzten Elektricitäten an, so finden wir, dass die Glieder mit den zweiten Differentialquotienten wegfallen. Dieselben werden also auch weder für die Kreisströme noch für Solenoide oder Ringmagnete, als deren Elemente die Kreisströme fungiren, eine Rolle spielen. Es machen sich also Änderungen der Intensität, also auch das Verlöschen zweier Ringmagnete unter einander nicht fühlbar, und der Widerspruch zwischen der Weber'-chen und der Hertz'schen Theorie tritt auch hier zu Tage.

Um nicht missverstanden zu werden, bemerke ich noch, dass ich keineswegs etwa eine Vertheidigung der Weber'schen Theorie im Sinne hatte, sondern, dass mir im Gegentheile die von Hertz aus seiner Annahme erschlossenen Folgerungen die grösste Wahrscheinlichkeit zu haben scheinen.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet, Herrn Regierungsrath Professor Dr. Boltzmann für seine Anregung zu dieser Arbeit und für die mir vielfach gewährte Anleitung und Unterstützung meinen tiefgefühltesten Dank auszusprechen.
